Нечеткие множества и зачем они нужны искусственному интеллекту?

Многие учебники математики говорят нам о том, что множество – это некая совокупность объектов (иногда уточняют – одной природы). Математики чаще всего как объекты рассматривают числа – натуральные, действительные, простые и т.п. Объекты, составляющие множества, еще называют элементами множества.

Например, множество натуральных чисел от 1 до 5:

$$N = \{1, 2, 3, 4 , 5\},$$

В данном примере множество N – это заданный набор чисел.

Приложения теории множеств включает такие области, как:

- **Информатика:** системы баз данных, алгоритмы и разработка компьютерных языков, организация данных.
- **Логика и философия:** основа для формальной логики, анализ философских аргументов и структуры математических доказательств.
- **Вероятность и статистика:** определение выборочных пространств и событий, что имеет решающее значение для вычисления вероятностей и анализа статистических данных.
- **Лингвистика:** применяется в семантике для понимания и категоризации языковых структур, улучшая обработку естественного языка.
- **Теория информации:** классификация и организация информации, оптимизация хранения и поиска данных.
- **Теория принятия решений:** структурирование информации об объектах и их показателях для принятия решений в экономике, технике, медицине и т.д.

Множества могут быть пустыми, бесконечными, конечными, универсальными.

Несмотря на то, что люди оперировали понятием «множество» с давних времен, теория множеств окончательно сформировалась в 19-20 веках.

Когда мы имеем дело с классическим множеством, то операции над ним строго предопределены, причем мы можем оперировать только с заданным набором объектов, которые однозначно ассоциируются с множеством, в которое входят.

Однако люди привыкли оперировать не точными понятиями, а приблизительными рассуждениями. Так, например, если температура на улице +20 градусов Цельсия, то вопрос: «Как вы оцениваете температуру?», некоторые ответят: «Сегодня тепло», другие скажут: «Прохладно», а кто-то скажет: «Нормальная».

Точно также люди могут оценить цену на товар, сказав, что цена «высокая», «низкая», «приемлемая».

Так, например, директор предприятия может поставить задачу главному инженеру и главному экономисту: «в следующем году необходимо существенно снизить себестоимость продукции». Главный инженер, которому подчинены начальники производственных подразделений, должен сформулировать эту же задачу с некоторым уточнением: «для снижения себестоимости продукции необходимо произвести вовремя все плановые ремонты оборудования, повысить квалификацию кадров, снизить материалоемкость продукции, повысить трудовую дисциплину, снизить брак».

В 1965 году американский математик Лотфи Заде опубликовал свою статью “Fuzzy Sets” (Fuzzy sets// Information and Control, 1965, 8, pp.338-353 https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X), которая произвела фурор в среде математиков и специалистов по управлению (технической кибернетике). На сегодняшний день работы Л.Заде цитируются более 110 тысяч раз.

Дословно ”Fuzzy Sets” переводится на русский язык, как «размытые множества», однако в отечественной литературе прижилось другое название – «нечеткие множества».

Нечетким множеством (НМ) A в некотором (непустом) пространстве $X, A \subseteq X$ называется множество пар (кортежей) вида:

$$A=\left\{\left(x,\mu_A(x);\forall x\in X\right)\right\}, \qquad (1)$$

где x — элементы множества X, которое также называют универсумом; $\mu_A(x)$ — функция принадлежности нечеткого множества A.

Функция принадлежности ставит в соответствие каждому значению x число — *степень принадлежности* из интервала $\left[0;1\right]$, то есть представляет собой отображение вида:

$$\mu_A(x): X \to [0,1], \forall x \in X. \qquad (2)$$

Если степень принадлежности $\mu_A(x)=1$, говорят о полной принадлежности x к НМ A, т. е. $x \in A$. Значение $\mu_A(x)=0$ означает отсутствие принадлежности x к НМ A, т. е. $x \notin A$.

Нечеткие множества могут быть пустыми (не содержат ни одного элемента), конечными (содержат конечное, ограниченное количество элементов) и бесконечными (содержат бесконечное множество элементов). Если значения $\mu_A(x)=1$ для всех $x \in X$, такое НМ называют универсальным. Чаще всего используются конечные НМ, как имеющие практический смысл. Пустые и бесконечные НМ применяют в основном в теоретических исследованиях, так как они могут быть описаны аналитически.

Конечные НМ часто представляют в виде:

$$A=\left\{\left\langle x_1,\mu_A(x_1)\right\rangle,\left\langle x_2,\mu_A(x_2)\right\rangle,\ldots,\left\langle x_n,\mu_A(x_n)\right\rangle\right\}, \qquad (3)$$

или:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}, \tag{4}$$

где n — количество элементов нечеткого множества A.

Знак «+» в (4) не означает сумму в математическом смысле, его следует понимать как множественное суммирование элементов. Знак «–» также не означает деления, он отражает присваивание конкретным элементам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ степеней принадлежности $\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \ldots, \mu_A(x_n)$.

Пример.

Пусть $X = \{0.00, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35\}$ — множество возможных значений рентабельности продукции предприятия. Нечеткое множество A, представляющее рентабельность продукции, определено экспертами согласно (3), (4) следующим образом:

$$\begin{gathered} A = \{\langle 0.00, 0.00\rangle, \langle 0.10, 0.20\rangle, \langle 0.15, 0.50\rangle, \langle 0.20, 0.70\rangle, \\ \langle 0.25, 1.00\rangle, \langle 0.30, 0.70\rangle, \langle 0.35, 0.00\rangle\} = \\ = \frac{0.00}{0.00} + \frac{0.10}{0.20} + \frac{0.15}{0.50} + \frac{0.20}{0.70} + \frac{0.25}{1.00} + \frac{0.30}{0.70} + \frac{0.35}{0.00}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Нечеткое множество (5) может быть представлено в виде графика функции принадлежности, показанной на рис. 1. Здесь маркерами обозначены элементы конечного нечеткого множества (5), а сплошная линия отображает результат сглаживания.

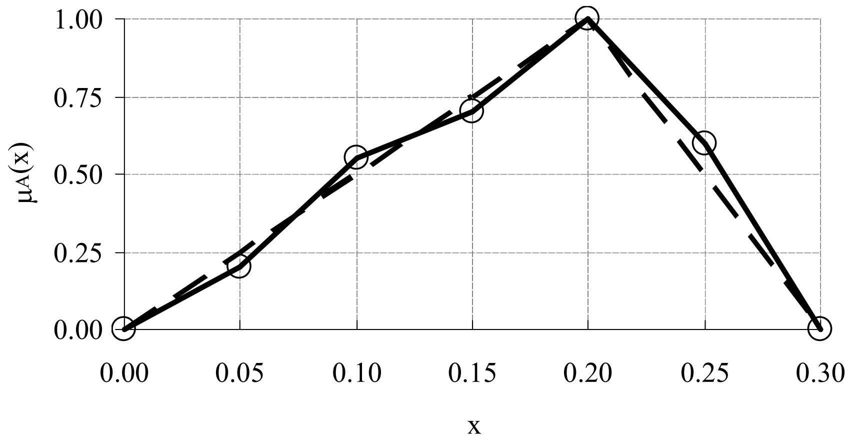

Рис. 1. Функция принадлежности нечеткого множества (2.5)

Где применяются нечеткие множества:

1 Автоматизированное принятие решений. Нечеткая логика может использоваться для создания экспертных систем, которые принимают решения в условиях неопределенности и неполноты информации. Например, экспертная система для оценки платёжеспособности клиента банка может использовать нечеткую логику для анализа множества факторов, таких как возраст, пол, заработная плата, наличие текущих займов и пр.

2 Управление электроникой. Нечеткая логика может использоваться для управления сложными системами, например, управление температурой в

помещении, учитывая множество факторов, таких как температура на улице, количество людей в помещении и пр.

3 Моделирование поведения людей. Нечеткая логика может использоваться для моделирования поведения людей в различных жизненных ситуациях. Например, для моделирования поведения водителей на дороге нужно учитывать множество факторов, таких как скорость движения, расстояния до других автомобилей, помехи, погодные условия и пр.

4 Нейронные сети. Нечеткая логика применяется для построения классификаторов, которые способны обрабатывать нечеткие категории и метки. Так известная система «Chat GPT» использует нечеткую логику для создания экспертных систем, которые могу обрабатывать нечеткие или неопределенные вопросы и выдавать соответствующие ответы.